

ĐỀ MINH HỌA TỐT NGHIỆP THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN: TOÁN

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là:

- A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C$. B. $e^x + C$. C. $\frac{e^x}{x} + C$. D. $x \cdot e^{x-1} + C$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a; b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là:

- A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx$. B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx$. C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx$. D. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

Câu 3: Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau:

M_1 :

| | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| Tần số | 3 | 4 | 8 | 6 | 4 |

M_2 :

| | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| Tần số | 6 | 8 | 16 | 12 | 8 |

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 . Phát biểu nào sau đây là đúng?

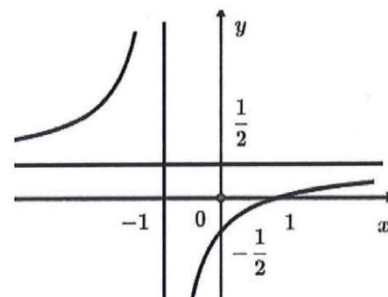
- A. $s_1 = s_2$. B. $s_1 = 2s_2$. C. $2s_1 = s_2$. D. $4s_1 = s_2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1; -3; 5)$ và có một vector chỉ phương $(2; -1; 1)$ là:

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:

- A. $x = -1$. B. $y = \frac{1}{2}$.
C. $y = -1$. D. $x = \frac{1}{2}$.



Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là:

- A. $(1; 9)$. B. $(-\infty; 9)$. C. $(9; +\infty)$. D. $(1; 7)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 3y - z + 8 = 0$. Vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- A. $(1; -3; 1)$. B. $(1; -3; -1)$. C. $(1; -3; 8)$. D. $(1; 3; 8)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?

- A. (SAB) . B. (SBC) . C. (SCD) . D. (SBD) .

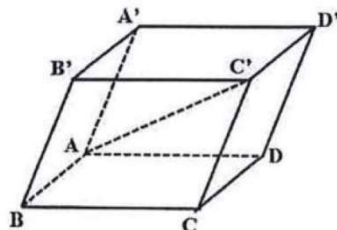
Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^x = 6$ là:

- A. $x = \log_6 2$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = \log_2 6$.

Câu 10: Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_4 của cấp số cộng là:

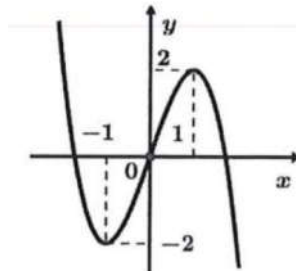
- A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?



- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 12: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(1; +\infty)$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 \cos x + x$.

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2 \sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Câu 2: Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn $200m$, tốc độ của ô tô là $36km/h$. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b (a, b \in \mathbb{R}, a > 0)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là $180m$.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây $(0 \leq t \leq 24)$ kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t v(t)dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h .

Câu 3: Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm".

Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.

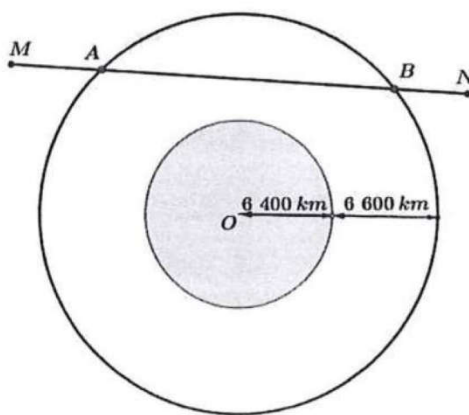
b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 4: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị

độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6;20;0)$ đến điểm $N(-6;-12;16)$.



a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \\ z = -4 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

b) Vị trí đầu tiên thiên thạch đi chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3;-4;12)$.

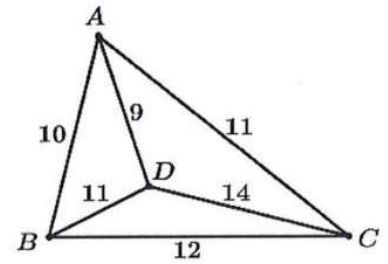
c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch đi chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5, BC = 6, CA = 7$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

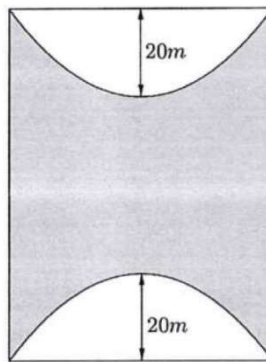
Câu 2: Một trò chơi điện tử quy định như sau: Có 4 trụ A, B, C, D với số lượng các thử thách trên đường đi giữa các cặp trụ được mô tả trong hình bên. Người chơi xuất phát từ một trụ nào đó, đi qua tất cả các trụ còn lại, mỗi khi đi qua một trụ thì trụ đó sẽ bị phá hủy và không thể quay trở lại trụ đó được nữa, nhưng người chơi vẫn phải trở về trụ ban đầu. Tổng số thử thách của đường đi thỏa mãn điều kiện trên nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Câu 3: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0), B(3;6;6), C(4;6;2), D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA=3, MB=6, MC=5, MD=13$.

Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Câu 4: Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60 m và 80 m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20 m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?



Câu 5: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Câu 6: Có hai chiếc hộp, hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng, các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x$ là:

A. $\frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

B. $e^x + C.$

C. $\frac{e^x}{x} + C.$

D. $x \cdot e^{x-1} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên đoạn $[a; b]$. Xét hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$. Khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox có thể tích là:

A. $V = \pi \int_a^b |f(x)| dx.$

B. $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

C. $V = \pi^2 \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

D. $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$

Lời giải

Chọn B

Câu 3: Hai mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 có bảng tần số ghép nhóm như sau:

| | | | | | | |
|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| M_1 : | Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| | Tần số | 3 | 4 | 8 | 6 | 4 |

| | | | | | | |
|---------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|
| M_2 : | Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| | Tần số | 6 | 8 | 16 | 12 | 8 |

Gọi s_1, s_2 lần lượt là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1, M_2 . Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $s_1 = s_2.$

B. $s_1 = 2s_2.$

C. $2s_1 = s_2.$

D. $4s_1 = s_2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có các bảng thống kê sau:

| | | | | | | |
|---------|------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| M_1 : | Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| | Giá trị đại diện | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| | Tần số | 3 | 4 | 8 | 6 | 4 |

| | | | | | | |
|---------|------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| M_2 : | Nhóm | [8;10) | [10;12) | [12;14) | [14;16) | [16;18) |
| | Giá trị đại diện | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| | Tần số | 6 | 8 | 16 | 12 | 8 |

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm M_1

$$\bar{x}_1 = \frac{3 \cdot 9 + 11 \cdot 4 + 13 \cdot 8 + 15 \cdot 6 + 17 \cdot 4}{25} = 13,32.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm M_1

$$s_1^2 = \frac{1}{25} [3(9 - 13,32)^2 + 4 \cdot (11 - 13,32)^2 + 8 \cdot (13 - 13,32)^2 + 6 \cdot (15 - 13,32)^2 + 4 \cdot (17 - 13,32)^2]$$

$$+4.(17-13,32)^2] = 5,9776$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_1 là: $s_1 = \sqrt{5,9776} \approx 2,44$.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm M_2

$$\bar{x}_2 = \frac{9 \cdot 6 + 11 \cdot 8 + 13 \cdot 16 + 15 \cdot 12 + 17 \cdot 8}{50} = 13,32.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm M_2

$$s_2^2 = \frac{1}{50} [6.(9-13,32)^2 + 8.(11-13,32)^2 + 16.(13-13,32)^2 + 12.(15-13,32)^2 + 8.(17-13,32)^2] = 5,9776.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm M_2 là: $s_2 = \sqrt{5,9776} \approx 2,44$.

Vậy $s_1 = s_2$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(1;-3;5)$ và có một vector chỉ phương $(2;-1;1)$ là:

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}$. B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.
C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+5}{1}$. D. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-5}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$, $ad-bc \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là:

A. $x = -1$. B. $y = \frac{1}{2}$.
C. $y = -1$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) < 3$ là:

A. $(1;9)$. B. $(-\infty;9)$. C. $(9;+\infty)$. D. $(1;7)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2(x-1) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < 2^3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 9.$

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;9)$.

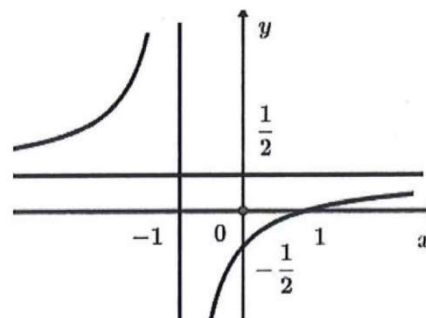
Câu 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x-3y-z+8=0$. Vector nào sau đây là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

A. $(1;-3;1)$. B. $(1;-3;-1)$. C. $(1;-3;8)$. D. $(1;3;8)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$?



A. (SAB).

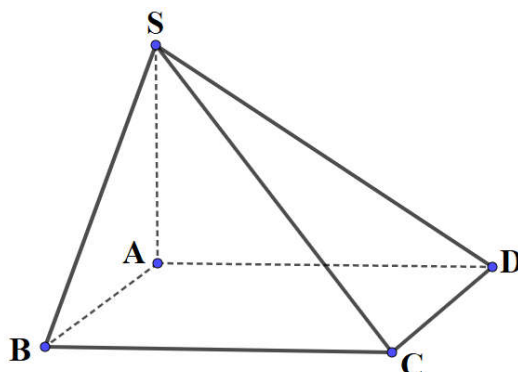
B. (SBC).

C. (SCD).

D. (SBD).

Lời giải

Chọn A



Do

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ \text{mà } SA \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD).$$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^x = 6$ là:A. $x = \log_6 2$.B. $x = 3$.C. $x = 4$.D. $x = \log_2 6$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x = 6 \Leftrightarrow x = \log_2 6$.Câu 10: Cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và $u_2 = 3$. Số hạng u_4 của cấp số cộng là:

A. 5.

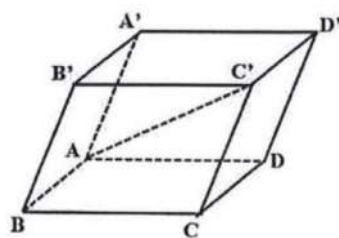
B. 7.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

Gọi d là công sai của cấp số cộng. Ta có: $d = u_2 - u_1 = 3 - 1 = 2$.Vậy $u_4 = u_1 + 3d = 1 + 3 \cdot 2 = 7$.Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (minh họa như hình bên). Phát biểu nào sau đây là đúng?A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AC'}$.B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AC'}$.C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 12: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

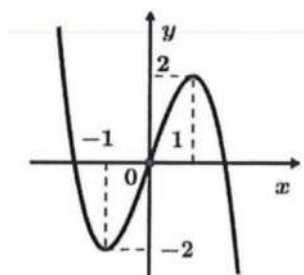
A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải



Chọn C

Dựa vào đồ thị của hàm số ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 \cos x + x$

a) $f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = 2 \sin x + 1$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\frac{\pi}{6}$.

d) Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ là $\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Đ-S-Đ-Đ

a) $f(0) = 2 \cos 0 + 0 = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

b) $f'(x) = -2 \sin x + 1$.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vì $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $x = \frac{\pi}{6}$.

d) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}; f(0) = 2; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Vậy $\max_{\left[0; \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$.

Câu 2: Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

a) Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m.

b) Giá trị của b là 10.

c) Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t v(t)dt$.

d) Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

Lời giải:

a) **Đúng**

Đổi $36km/h = 10m/s$.

Sau 2s quãng đường ô tô đi được lúc chưa tăng tốc là: $2 \cdot 10 = 20(m)$

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là $200 - 20 = 180(m)$.

b) **Đúng**

Tại thời điểm lúc ô tô bắt đầu tăng tốc ($t = 0$) thì vận tốc của ô tô vẫn đang là $10(m/s)$ nên:

$$v(0) = 10 \Rightarrow a \cdot 0 + b = 10 \Rightarrow b = 10.$$

c) **Sai**

Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^t v(t)dt$.

d) **Sai**

Ta có: $v(t) = at + 10(m/s)$.

Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là $180(m)$ đi trong thời

$$\text{gian } 12s \text{ nên ta có: } S(12) = \int_0^{12} v(t)dt = 180 \Leftrightarrow \int_0^{12} (at + 10)dt = 180$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \int_0^{12} tdt + \int_0^{12} 10dt = 180 \Rightarrow a = \frac{5}{6}.$$

Suy ra $v(t) = \frac{5}{6}t + 10(m/s)$, vậy sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô là:

$$v(24) = 30(m/s) = 108km/h > 100km/h.$$

Câu 3: Trước khi đưa một loại sản phẩm ra thị trường, người ta đã phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về sản phẩm đó. Kết quả thống kê như sau: có 105 người trả lời "sẽ mua"; có 95 người trả lời "không mua". Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" và "không mua" lần lượt là 70% và 30%.

Gọi A là biến cố "Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm".

Gọi B là biến cố "Người được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm".

a) Xác suất $P(B) = \frac{21}{40}$ và $P(\bar{B}) = \frac{19}{40}$.

b) Xác suất có điều kiện $P(A|B) = 0,3$.

c) Xác suất $P(A) = 0,51$.

d) Trong số những người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm có 70% người đã trả lời "sẽ mua" khi được phỏng vấn (kết quả tính theo phần trăm được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{105}{200} = \frac{21}{40}$.

Xác suất của biến cố \bar{B} là $P(\bar{B}) = \frac{95}{200} = \frac{19}{40}$.

Chọn Đúng.

b) Biến cố $A|B$ là biến cố: “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm nếu người đó được phỏng vấn trả lời sẽ mua sản phẩm”.

Theo giả thiết: Tỷ lệ khách hàng thực sự sẽ mua sản phẩm tương ứng với những cách trả lời "sẽ mua" là 70% nên ta có $P(A|B) = \frac{7}{10} = 0,7$.

Chọn Sai.

c) Ta có $A|\bar{B}$ là biến cố: “Người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm nếu người đó được phỏng vấn trả lời không mua”.

Theo giả thiết ta có $P(A|\bar{B}) = 0,3$.

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$P(A) = P(A|B).P(B) + P(A|\bar{B}).P(\bar{B}) = 0,7 \cdot \frac{21}{40} + 0,3 \cdot \frac{19}{40} = \frac{51}{100} = 0,51.$$

Chọn Đúng.

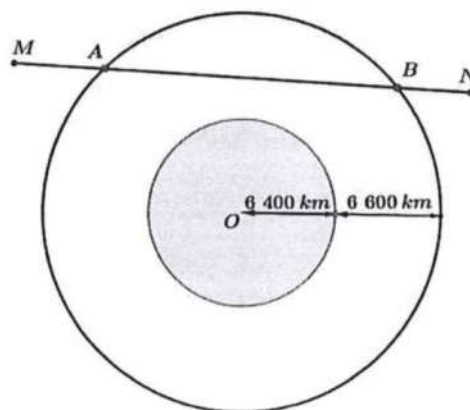
d) Ta có $B|A$ là biến cố: “Người đó đã trả lời sẽ mua sản phẩm khi được phỏng vấn và người được phỏng vấn thực sự sẽ mua sản phẩm”.

Theo công thức BAYES ta có

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot \frac{21}{40}}{0,51} \approx 72\%.$$

Chọn Sai.

Câu 4: Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất. Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6; 20; 0)$ đến điểm $N(-6; -12; 16)$.



- a) Đường thẳng MN có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \ (t \in R) \\ z = -4 \end{cases}$$
- b) Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3; -4; 12)$.
- c) Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi quan sát của hệ thống quan sát là 18 900 km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị ki-lô-mét).
- d) Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Lời giải

a) Đúng

Ta có $M(6; 20; 0), N(-6; -12; 16) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(-12; -32; 16)$. Chọn $\overrightarrow{u_{MN}}(3; 8; -4)$.

Khi đó, phương trình MN :
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t \ (t \in R) \\ z = -4t \end{cases}$$

b) Sai

Phạm vi theo dõi của hệ thống ra đa là mặt cầu $(O): x^2 + y^2 + z^2 = 13^2$.

Tọa độ giao điểm của MN và (O) là nghiệm của phương trình

$$(6 + 3t)^2 + (20 + 8t)^2 + (-4t)^2 = 13^2$$

$$\Leftrightarrow 89t^2 + 356t - 267 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow A(3; 12; 4) \\ t = -3 \Rightarrow B(-3; -4; 12) \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{MA}(-3; -8; 4), \overrightarrow{MB}(-9; -24; 12) \Rightarrow \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MA} \Rightarrow$ Điểm gặp đầu tiên là $A(3; 12; 4)$.

c) Đúng

$$AB = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-4 - 12)^2 + (12 - 4)^2} = \sqrt{356}$$

Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 000 km nên khoảng cách $AB \approx 18\,900(km)$

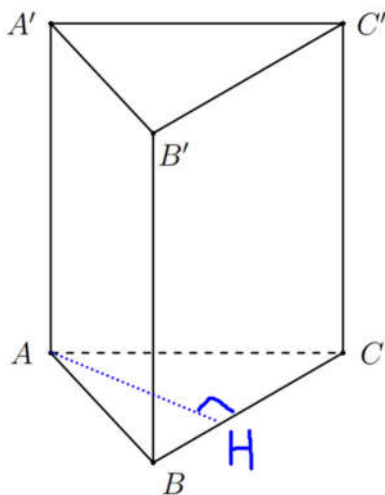
d) Đúng

$$AB = 2\sqrt{89}, MN = 4\sqrt{89} \Rightarrow t_{MN} = 2t_{AB} = 2.3 = 6 \text{ (phút)}$$

PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5, BC = 6, CA = 7$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



Lời giải

Trả lời: 4,9.

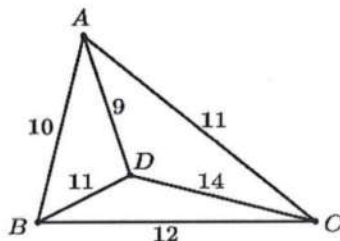
Dựng đường cao AH của $\triangle ABC$. Lại có: $A'A \perp AH$. Suy ra AH là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AA' và BC .

Suy ra: $d(A'A; BC) = AH$.

Ta có: $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = 6\sqrt{6}$.

Vậy $d(AA', BC) = AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} \approx 4,9$

Câu 2: Một trò chơi điện tử quy định như sau: Có 4 trụ A, B, C, D với số lượng các thử thách trên đường đi giữa các cặp trụ được mô tả trong hình bên. Người chơi xuất phát từ một trụ nào đó, đi qua tất cả các trụ còn lại, mỗi khi đi qua một trụ thì trụ đó sẽ bị phá hủy và không thể quay trở lại trụ đó được nữa, nhưng người chơi vẫn phải trở về trụ ban đầu. Tổng số thử thách của đường đi thỏa mãn điều kiện trên nhận giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 43.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, D, C, B, A là: 45.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, D, B, C, A là: 43.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, B, D, C, A là: 46.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, B, C, D, A là: 45.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, C, D, B, A là: 46.

Thử thách đi theo thứ tự trụ A, C, B, D, A là: 43.

Các trường hợp còn lại có được bằng cách thay thế $A \rightarrow B, B \rightarrow A$ và $A \rightarrow C, C \rightarrow A$ và $A \rightarrow D, B \rightarrow D$. Khi đó tổng số thử thách không thay đổi so với xuất phát từ trụ A .

Vậy tổng số thử thách nhỏ nhất là: 43

Câu 3: Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không

gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?

Lời giải

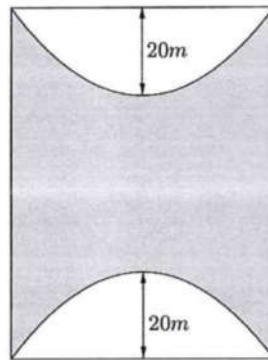
Ta có, vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} MA = 3 \\ MB = 6 \\ MC = 5 \\ MD = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 2b = -1 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 12b - 12c = -45 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 12b - 4c = -31 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 4b - 28c = -67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10b - 12c = -44 \\ -2a - 10b - 4c = -30 \\ -6a - 2b - 28c = -66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow M(1;2;2).$$

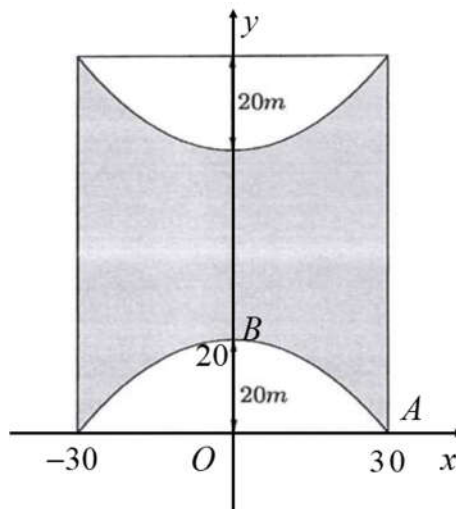
Vậy $OM = 3$

Câu 4: Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Trả lời: 3200



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ. Ta có $A(30;0), B(0;20) \Rightarrow (P): y = -\frac{1}{45}x^2 + 20$

Khi đó diện tích phần parabol là: $4 \int_0^{30} \left(-\frac{1}{45}x^2 + 20 \right) dx = 1600(m^2)$

Vậy diện tích phần sân chơi là: $60.80 - 1600 = 3200(m^2)$

Câu 5: Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm $1 \leq x \leq 500$ thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là:

$F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng) trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là: $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Lời giải

Chi phí sản xuất khi sản xuất x sản phẩm là $C(x) = x \cdot G(x) = x \cdot \left(x + 1000 + \frac{250000}{x} \right)$
 $= x^2 + 1000x + 250000$

Do đó, lợi nhuận $L(x)$ là:

$$L(x) = F(x) - C(x) = (x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000) - (x^2 + 1000x + 250000)$$

$$= x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000 - x^2 - 1000x - 250000 = x^3 - 2000x^2 + 1000000x$$

Ta có

$$L'(x) = 3x^2 - 4000x + 1000000. \text{ Cho } L'(x) = 0 \text{ hay } 3x^2 - 4000x + 1000000 = 0, (1 \leq x \leq 500)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4000 + 2000}{6} = \frac{6000}{6} = 1000 \notin [1; 500] \\ x = \frac{4000 - 2000}{6} = \frac{2000}{6} \approx 333.33 \in [1; 500] \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

| x | 0 | 333,33 | 500 |
|---------|---|------------|-----|
| $L'(x)$ | | + | - |
| $L(x)$ | | 1481481,37 | |

Vậy doanh nghiệp nên sản xuất khoảng 333 sản phẩm để lợi nhuận đạt mức lớn nhất.

Câu 6: Có hai chiếc hộp. Hộp I có 6 quả bóng màu đỏ và 4 quả bóng màu vàng, hộp II có 7 quả bóng màu đỏ và 3 quả bóng màu vàng. Các quả bóng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp I bỏ vào hộp II. Sau đó, lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp II. Tính xác suất để quả bóng được lấy ra từ hộp II là quả bóng được chuyển từ hộp I sang, biết rằng quả bóng đó có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Gọi A là biến cố “Quả bóng lấy ra từ hộp II là quả bóng đỏ được chuyển từ hộp I”.

B là biến cố “Quả bóng lấy ra từ hộp II có màu đỏ.” Theo công thức Bayes: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Với $P(AB)$: Xác suất vừa chuyển bóng đỏ từ hộp I và lấy đúng quả bóng đỏ đó từ hộp II.

$P(B)$: Xác suất lấy được một quả bóng đỏ từ hộp II (bất kể là bóng nào).

Gọi H_1 là biến cố “Chuyển một quả bóng đỏ từ hộp I sang hộp II.”

H_2 là biến cố “Chuyển một quả bóng vàng từ hộp I sang hộp II.”

Ta có hệ biến cố đầy đủ H_1, H_2 , với các xác suất: $P(H_1) = \frac{6}{10}, P(H_2) = \frac{4}{10}$

Trường hợp 1 (chuyển bóng đỏ từ hộp I):

- Khi chuyển một quả bóng đỏ từ hộp I sang, hộp II có 8 quả bóng đỏ và 3 quả bóng vàng.

- Xác suất lấy bóng đỏ trong trường hợp này là: $P(B | H_1) = \frac{8}{11}$

Trường hợp 2 (chuyển bóng vàng từ hộp I):

- Khi chuyển một quả bóng vàng từ hộp I sang, hộp II có 7 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng.

- Xác suất lấy bóng đỏ trong trường hợp này là: $P(B | H_2) = \frac{7}{11}$

Vậy xác suất lấy được một quả bóng đỏ từ hộp II là:

$$P(B) = P(B | H_1)P(H_1) + P(B | H_2)P(H_2) = \frac{8}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{48}{110} + \frac{28}{110} = \frac{76}{110}$$

Xác suất vừa chuyển một quả bóng đỏ từ hộp I và lấy đúng quả đó từ hộp II là:

$$P(AB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{11} = \frac{6}{110}$$

$$\text{Áp dụng công thức Bayes: } P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{110}}{\frac{76}{110}} = \frac{6}{76} = \frac{3}{38} \approx 0.0789 \approx 0.08$$

Xác suất để quả bóng lấy ra từ hộp II là quả bóng đỏ đã được chuyển từ hộp I là 0.08.